

# OUTILS D'INFORMATIQUE MUSICALE APPLIQUÉS EN TEMPÉRAMENTOLOGIE

*Gilles Baroin*

Laboratoire LLA Créatis, Laboratoire ENAC  
Université de Toulouse  
Gilles@Baroin.org

*André Calvet*

Écrivain, accordeur, consultant IRCAM  
ddcalvet@gmail.com

## RÉSUMÉ

Il est établi qu'un modèle visuel accompagnant un exemple sonore renforce la sensation de l'auditoire et que la façon dont un piano est accordé influence la restitution d'une œuvre. Nous avons élaboré des outils spécifiques dédiés aux tempéraments [7] et présentons ici une extension à différents modèles 2D, 3D et 4D, optimisés afin d'amplifier la sensation auditive.

La démonstration de ces outils s'effectue à l'aide de films d'animation. Afin d'étudier chaque tempérament de façon dynamique et de le comparer au tempérament égal, nous utilisons la même séquence musicale sous forme de fichier MIDI, jouée par le logiciel *Pianoteq* [10], tempérée différemment selon les cas. Afin de donner la même importance à chaque tonalité, la progression harmonique est complète et régulière, à savoir *do* majeur, *la* mineur, *fa* majeur, *ré* mineur... *mi* mineur, *do* majeur.

Les représentations statiques planes mettent en valeur des symétries intrinsèques et proposent un moyen de comparer différents tempéraments sans les entendre. Les projections dynamiques sont adaptées à l'adéquation entre l'équilibre perçu visuellement et la consonance ressentie à l'écoute.

Les vidéos sont disponibles à l'adresse [www.mathemusic.net](http://www.mathemusic.net).

## 1. INTRODUCTION

Notre système auditif étant habitué au tempérament égal appliqué aux instruments de musique et aux ensembles occidentaux modernes, nous percevons les autres systèmes d'accordage comme inconnus voire dissonants, sans pouvoir décrire exactement ce qui apparaît étrange et préciser l'origine de ces disparités. L'oreille se trouve notamment surprise à l'écoute des tierces pures impliquées dans un tempérament mésotonique et parfois même confuse à l'audition de quintes pures.

Il est indéniable qu'une représentation visuelle accompagnant un extrait musical conforte la prise de conscience et maximise la sensation auditive. Nous avons développé des outils de visualisation spécifiques à l'étude des tempéraments, en particulier des modèles à deux, trois et quatre dimensions, optimisés dans le but d'amplifier la sensation auditive et de comparer différents tempéraments de façon graphique.

### 1.1. Contexte

Le domaine de la tempéramentologie est vaste. Cette discipline pourtant ancienne et essentielle est souvent méconnue des compositeurs, des musiciens et plus encore du grand public, qui ne prêtent plus attention à la façon dont l'accord des instruments est réalisé. Quelques applications célèbres, comme *Le clavier bien tempéré*, évoquent toutefois certaines sensations, que certains qualifient de couleurs, et dont la perception varie sensiblement selon les auditeurs et leurs expériences.

En tempéramentologie, la gamme de Pythagore, non tempérée, qui en est le crépuscule paradoxal, sacrifie une quinte dite « du loup » afin de retomber sur l'octave. Cette dernière est parfaitement reconnaissable car désagréable à l'oreille. Les théoriciens successifs s'attacheront à répartir le fameux comma sur un nombre toujours plus grand de quintes, pour au final tolérer une répartition égalitariste : le tempérament égal.

L'auditeur ne ressent en général que confusément la distance entre un tempérament donné et le tempérament égal, devenu une sorte de référence ou d'unité de mesure. La distance aux intervalles purs a peu à peu cédé la place à la distance à ceux du tempérament égal. C'est ce que nous illustrons ici à l'aide de modèles graphiques calculés et optimisés.

### 1.2. Définitions

Un tempérament fait référence à un système d'accordage spécifique pour la subdivision de l'octave. L'accordage à un tempérament choisi est le processus d'ajustement des intervalles pour un piano, ou pour d'autres instruments. Nous ne prenons pas en compte l'inharmonicité de l'instrument lui-même et considérons que chaque octave correspond à un rapport exact de 2:1, les tempéraments étant ainsi définis à l'intérieur d'une octave. Afin de les comparer, nous transposons les tempéraments historiques étudiés à une même référence choisie par convention : *do* (note n° 0).

En intonation juste, chaque intervalle entre deux hauteurs données correspond à un rapport de nombres entiers entre leurs fréquences ; dans le cas du tempérament égal, l'octave est divisée en douze demi-tons égaux. Pour l'histoire et les détails concernant la tempéramentologie, voir [8, 11, 12]. À l'époque de l'intonation jus-

te, les tempéraments étaient conçus afin que les instruments de musique sonnent justes dans quelques tonalités distinctives ; ils s'avéraient en revanche dissonants dans les autres cas. L'auditeur identifie toutefois des dissonances et ressent vaguement une distance entre un tempérament spécifique et le tempérament égal. Au fil du temps, la distance au système pythagoricien céda ainsi progressivement sa place à la distance au tempérament égal.

Les outils statiques que nous avons développés sont utilisés pour quantifier, visualiser et comparer les tempéraments entre eux. Notre approche dynamique permet d'identifier les tonalités auxquelles le tempérament est destiné et de distinguer de façon progressive les environnements harmoniques qui produiront un sentiment habituel ou de déplaisant à l'oreille contemporaine. Nous avons appliqué ces méthodes à des systèmes et tempéraments bien connus tels que ceux de Zarlino, Pythagore, Bach par Kellner, le mésotonique selon Aaron, etc. Nous avons choisi d'illustrer le célèbre *Clavier bien tempéré* de J.-S. Bach reconstitué par Kellner [13], les autres interprétations de l'image du grand maître nous fournissant des visualisations si voisines qu'à peine discernables.

## 2. OUTILS DE VISUALISATION

### 2.1. Règles générales

Pour la comparaison statique, nous superposons le dessin du tempérament étudié à celui du tempérament égal et observons les différences de forme. Pour la visualisation dynamique, nous réduisons l'harmonie locale à un accord parfait composé de trois intervalles, la tierce mineurs (m3), la tierce majeure (M3) et la quinte juste (P5), et nous comparons les valeurs de ces derniers aux fréquences théoriques correspondant à une intonation juste, respectivement  $5/6$ ,  $5/4$  et  $3/2$ . Nous présentons chaque tempérament avec la même séquence musicale [9] générée à partir d'un fichier MIDI à l'aide du logiciel *Pianoteq* [7, 9], qui fournit la possibilité d'un accordage personnalisé et précis.

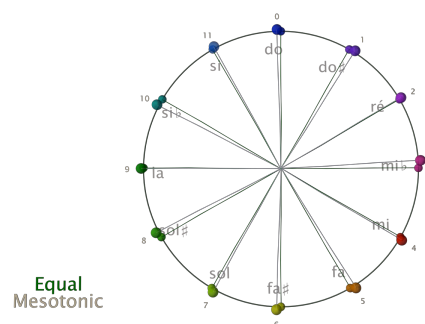
Afin de parcourir aisément les vingt-quatre tonalités possibles, la musique suit un chemin hamiltonien régulier sur le *Tonnetz*<sup>1</sup>. Il s'agit d'une succession de transformations L et R : *do* majeur, *la* mineur, *fa* majeur, *ré* mineur... *mi* mineur, *do* majeur.

### 2.2. Deux dimensions

#### 2.2.1. Représentation usuelle existante

Si l'on représente de façon usuelle le logarithme des fréquences de chaque note du tempérament considéré le long d'un cercle [5], le tempérament égal révélera un dodécagone régulier. Cependant, en raison des différen-

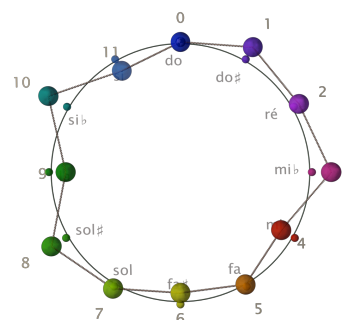
ces fréquentielles très faibles entre les tempéraments, la superposition des représentations n'est pas suffisamment pertinente (figure 1). Cela nous a conduits à développer des modèles de dimensions supérieures.



**Figure 1.** Représentation traditionnelle du tempérament mésotonique et du tempérament égal.

#### 2.2.2. Représentation statique

Nous utilisons le cercle chromatique comme base et associons à chaque note un nombre complexe dont le modulo est proportionnel au rapport à la fréquence en tempérament égal. Au lieu de varier la position des notes le long du cercle, nous modifions ainsi son rayon en chaque point [7]. Le tempérament égal étant toujours représenté sous la forme d'un dodécagone régulier, les autres tempéraments prennent la forme de polygones équiangulaires mais non réguliers ; l'opération donne ainsi l'impression d'étirer le cercle chromatique le long de son rayon. En superposant les différentes représentations de tempéraments, il est possible de les comparer. La figure 2 en donne un exemple dans le cas du tempérament mésotonique.



**Figure 2.** Représentation statique du tempérament Zarlino et du tempérament égal.

#### 2.2.3. Visualisation dynamique

En considérant chaque accord comme parfait, nous utilisons la méthode de visualisation existante détaillé dans [7]. Notre progression harmonique révèle ainsi un triangle tournant et se déformant. Chaque côté du triangle illustrant un intervalle constitutif de la triade, nous varions sa teinte selon la proximité de l'intervalle à sa

<sup>1</sup> Le *Tonnetz* est la représentation de l'espace des accords sous forme de grille généralement utilisée pour l'analyse des chemins d'accords [4]. Pour plus de précisions sur les chemins hamiltoniens et le *Tonnetz*, voir [1, 4].

valeur théorique en intonation juste, afin d'indiquer le rapport à un intervalle pur (figure 3). Le vert symbolise les intervalles purs, le rouge les intervalles plus éloignés. La coloration reste constante pour le tempérament égal et les tempéraments comportant des intervalles purs comprennent des séquences entièrement vertes lorsque la musique se trouve dans la tonalité pour laquelle ils ont été conçus.

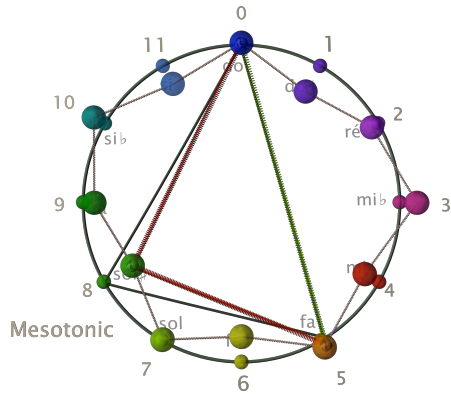


Figure 3. Le cercle chromatique tempéré comparant les tempéraments mésotonique et égal.

### 2.3. Trois dimensions

Un accord parfait étant constitué de trois intervalles ( $m_3$ ,  $M_3$  et  $P_5$ ), nous le modélisons directement en 3D par un parallélépipède rectangle dont les côtés sont proportionnels à un intervalle pur. La couleur de la boîte variant globalement du vert au rouge, selon la moyenne des écarts par rapport aux intervalles justes, une triade théorique faite d'intervalles purs donne par conséquent lieu à un cube aux côtés verts (figure 4). Cette méthode offre une représentation globale de la dissonance perçue, mais ne donne pas la possibilité de comparer les tempéraments autrement qu'aux intervalles purs. Nous observons de façon satisfaisante l'adéquation entre la déformation globale, la couleur et la dissonance évoluant au cours de la musique.

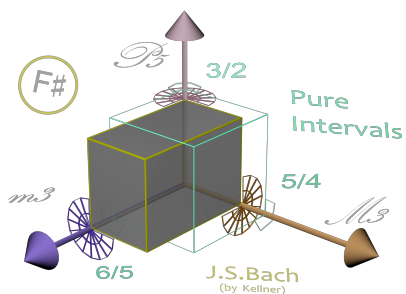


Figure 4. Le cube harmonique tempéré montrant le tempérament Bach par Kellner, ici en *fa* dièse majeur, par rapport aux intervalles purs.

### 2.4. Quatre dimensions

En raison de la topologie de l'espace 4D, les objets doivent être mis en mouvement afin d'être intelligibles. Le modèle Planet-4D [6] fut initialement conçu avec l'intention de représenter des notes, ainsi que des accords tonaux ou atonaux tempérés. Le cercle chromatique s'y traduit par une courbe, que nous qualifions – pour faciliter la compréhension du lecteur – de géodésique chromatique, en surface de l'hypersphère. De façon similaire à l'approche bidimensionnelle, nous préservons l'équiangularité et ajustons simplement le rayon de cette courbe pour chaque note, le rayon étant proportionnel au rapport à la fréquence en tempérament égal. Nous utilisons également le même principe de coloration qu'en 2D (figure 5).

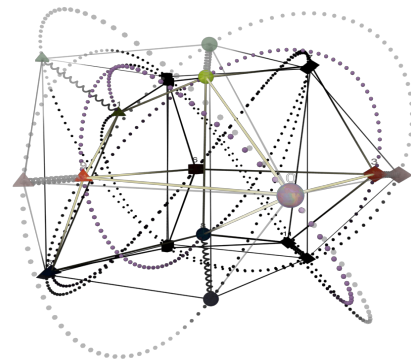


Figure 5. L'hypersphère tempérée (ici Zarlino) apparaissant comme une déformation du modèle Planète-4D (en gris).

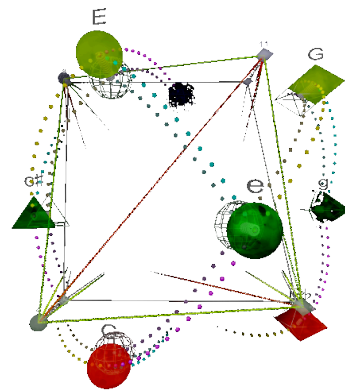


Figure 6. L'hypersphère tempérée avec Bach/Kellner, ici en *mi* mineur, apparaissant comme une déformation du modèle Planète-4D (en gris).

Comme attendu, la représentation 4D du tempérament égal est l'hypersphère usuelle du modèle Planet-4D de couleur constante [6]. D'autres tempéraments sont matérialisés par une sphère d'apparence plus ou moins étirée ou aplatie, et de teinte variable selon les notes. La visualisation 4D offre la possibilité d'observer la déformation de la sphère selon plusieurs points de vue, en mettant en avant un accord ou une note particulière.

Nous vérifions que le point de référence (*do*) ne bouge pas alors que, selon les tempéraments, les déformations maximales prennent des positions différentes. Nous constatons aussi que la forme obtenue par visualisation du tempérament de J.-S. Bach selon Kellner est assez ronde et sensiblement proche de la sphère de référence représentant le tempérament égal (figure 6).

En tant que représentations quadridimensionnelles, les symétries remarquées sont pertinentes [2], mais nous ne pouvons pas imaginer l'objet sans le mettre en mouvement, ce qui exclut toute comparaison statique.

### 3. CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons observé qu'en raison de la topologie de chaque espace, nos modèles ont des applications différentes. Le cercle chromatique tempéré statique fournit une impression globale instantanée de régularité et permet une comparaison directe entre les tempéraments. D'autre part, les modèles dynamiques sont adaptés au suivi de l'évolution de la dissonance ressentie, tandis que le chemin harmonique parcourt l'ensemble des accords. Le « Cube harmonique tempéré » 3D dynamique facilite la perception des accords harmoniquement proches – dont le niveau de dissonance est appréhendé de façon similaire – car ils sont représentés dans une couleur semblable. De plus, l'utilisateur obtient une perception globale efficace de la variation de la dissonance. Concernant le modèle Planet-4D Hypersphère Tempérée, bien que nous ne puissions comparer les tempéraments de manière statique, la perception de la symétrie y est maximisée. Ce modèle a été conçu en réponse à la question récurrente : « que faire si le tempérament n'est pas égal ? » Lors de prochains développements, nous envisageons d'étudier d'autres tempéraments et travaillerons à visualiser les inharmonicités propres à chaque instrument.

### 4. RÉFÉRENCES

- [1] Albini, G., Antonini, S. « Hamiltonian Cycles in the Topological Dual of the Tonnetz », *Mathematics and Computation in Music (MCM 2009)*, Chew, E., Childs, A., Chuan, C. H. (dir.). Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, p. 1-10.
- [2] Amiot, E., Baroin, G. « Old and New Isometries between Pc sets in the Planet-4D Model », *Music Theory Online* 21/3 (2015).
- [3] Andreatta, M., Baroin, G. « An Introduction on Formal and Computational Models in Popular Music Analysis and Generation », *Aesthetics and Neuroscience : Scientific and Artistic Perspectives*, Kapoula, Z., Vernet, M. (dir.). Springer, Cham, 2016, p. 257-269.
- [4] Andreatta, M. « On Group-Theoretical Methods applied to Music : Some Compositional and Implementational Aspects », *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*,

Lluis-Puebla, E. E., Mazzola, G., Noll, T. (dir.). Electronic Publishing Osnabrück, Osnabrück, 2004, p. 169-193.

- [5] Asselin, P.-Y. *Musique et tempérament*. Costallat, Paris, 1985.
- [6] Baroin, G. « The Planet-4D Model : An Original Hypersymmetric Music Space Based on Graph Theory », *Mathematics and Computation in Music (MCM 2011)*, Agon, C., Andreatta, M., Assayag, G., Amiot, E., Bresson, J., Mandereau, J. (dir.). Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, p. 326-329.
- [7] Baroin, G., Calvet, A. « Visualizing Temperaments : Squaring the Circle ? », *Mathematics and Computation in Music (MCM 2019)*, Montiel, M., Gómez-Martín, F., Agustín-Aquino, O. A. (dir.). Springer, Cham, 2019, p. 333-337.
- [8] Calvet, A. *Le clavier bien obtempéré : essai de tempéramentologie*. Piano e forte éditions, Moissac, 2020.
- [9] Dessault, H. *Improvised arpeggiated suites #1 et #4* (2015).
- [10] Guillaume, P. et coll. *Pianoteq*, 2005. [Logiciel. [www.modartt.com](http://www.modartt.com), accédé le 12/10/2020.]
- [11] Jedrzejewski, F. *Mathématiques des systèmes acoustiques : tempéraments et modèles contemporains*. L'Harmattan, Paris, 2002.
- [12] Jedrzejewski, F. *Hétérotopies musicales : modèles mathématiques de la musique*. Hermann, Paris, 2019.
- [13] Kellner, H. A. « Eine Rekonstruktion der wohltemperierten Stimmung von Johann Sebastian Bach », *Das Musikinstrument* 26/1 (1977), p. 34-35.

Texte édité par Nathalie Hérold