

ACTION D'AUTOMATES CELLULAIRES SUR DES SUITES INTERVALLIQUES

Paul Lanthier

LMRS (UMR 6085)
Université de Rouen, CNRS

planthier76@outlook.fr

Corentin Guichaoua

STMS (UMR 9912)
CNRS, IRCAM, Sorbonne Université
IRMA (UMR 7501)
Université Strasbourg, CNRS

corentin.guichaoua@ircam.fr

Rodolphe Bourotte

Centre Iannis Xenakis

rodolphe.bourotte@
centre-iannis-xenakis.org

RÉSUMÉ

Cet article est consacré à l'étude de suites musicales, notamment périodiques, au travers de transformations locales définies par des automates cellulaires. Dans un premier temps, nous présentons et complétons des résultats théoriques, en particulier à propos des deux automates correspondant aux opérations les plus intuitives sur des séquences musicales. Ces résultats sont dans un second temps mis à contribution pour une implémentation dans un module d'*UPISketch*, un programme d'assistance à la composition musicale par le dessin, en descendance directe de l'*UPIC* conçu par Iannis Xenakis.

1. INTRODUCTION

UPISketch offre la possibilité d'accéder aux nombres réels concernant le choix des fréquences et de la position temporelle des objets que l'on crée¹. On peut citer parmi ces objets des accords ou des courbes mais nous avons choisi de nous centrer sur un objet musical de base, la mélodie. Une mélodie peut être vue comme une suite d'intervalles et il en existe plusieurs types : on peut citer comme exemple les suites finies (ou mots), périodiques, quasi-périodiques et infinies. Nous choisissons ici d'étudier en détail le cas des suites périodiques à valeurs dans \mathbb{Z}_N .

Un lien naturel que l'on peut créer entre automates cellulaires et musique est fourni par notre écoute directe : lors de l'écoute de musique, nous sommes en effet amenés à effectuer un balayage local des fréquences que l'on perçoit. Nous cherchons à créer des liens entre les fréquences en réalisant un calcul ; le plus naturel est le calcul d'intervalles, mais on peut également citer la recherche de symétries. On pourrait dès lors interpréter notre écoute comme un automate cellulaire. Nous avons cependant plus de difficultés à réitérer à nouveau ce calcul mentalement ou à les inverser, d'où l'idée d'étudier les itérations de ces transformations intuitives dans un sens comme dans l'autre.

Ces questions ont d'abord été soulevées par le compo-

¹Dans la mesure de la précision autorisée par les nombres flottants.

siteur Anatol Vieru [6, 5, 7], qui a étudié à la main le cas du calcul d'intervalles pour le tempérament égal classique à 12 demi-tons. Elles ont ensuite été reprises par le mathématicien Dan T. Vuza qui est parvenu à un certain nombre de résultats génériques, qui ont par la suite été raffinés ou étendus. La première partie de cet article se place dans la lignée directe de ces résultats.

Il est intéressant de voir que des mélodies en apparence très différentes possèdent des symétries communes car ces dernières arrivent au même résultat via l'action du calcul d'intervalle par exemple. On dispose dès lors d'un outil de classification des suites possibles et d'une intégration automatisée des itérations des automates.

2. AUTOMATES CELLULAIRES

2.1. Généralités

Les *automates cellulaires* sont des transformations spécifiques agissant sur des grilles (finies ou infinies) de cellules où chaque cellule est à valeur dans un ensemble \mathbb{A} appelé *alphabet*. La notion fondamentale repose sur le principe que chaque cellule est actualisée selon l'état de ses voisines proches pour évoluer vers l'état suivant, selon des règles propres à l'automate choisi. Soit E un semi-groupe dénombrable appelé *grille*. On appelle *espace des configurations* $\mathcal{X} = \mathbb{A}^E$ l'ensemble de toutes les configurations possibles. Soit $\mathcal{N} \subset E$ partie finie que l'on appelle le *voisinage* qui décrit la portée de l'interaction entre les cellules de la grille sous l'action de l'automate, c'est à dire l'évolution de la grille du temps n au temps $n + 1$. On choisira dans cette étude par simplicité $E = \mathbb{Z}$, c'est à dire des suites bi-infinies.

Une transformation basique est l'opérateur de décalage appelé *shift* et noté $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ défini localement par :

$$(\sigma x)(i) = x(i + 1), \forall x \in \mathcal{X} \quad (1)$$

Nous considérerons dans cette étude le cas où \mathbb{A} est un groupe : soit $(\mathbb{A}, +)$ un groupe abélien fini ou infini, i.e. $\mathcal{X} = \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$.

Un *automate cellulaire déterministe* (ACD) est une transformation continue définie par un voisinage $\mathcal{N} =$

$\{k_0, \dots, k_n\}$ partie finie de \mathbb{Z} par

$$F : \left(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{A}^{\ell + \mathcal{N}} \right) \cup \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \left(\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{A}^{\ell} \right) \cup \mathbb{A}^{\mathbb{Z}} \quad (2)$$

et agissant localement via une fonction locale

$$f : \mathbb{A}^{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{A} \quad (3)$$

par la relation $\forall i \in \mathbb{Z}$:

$$(Fx)(i) = f(x(i + k_0), \dots, x(i + k_n)) \quad (4)$$

$$:= f(x(i + \mathcal{N})) \quad (5)$$

Pour un mot fini, d'itération en itération via l'automate, le mot tend à se réduire. Ainsi pour $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, un mot de taille ℓ deviendra de taille $\ell - 1$. En effet l'enchaînement de deux fréquences par exemple, ne donnera qu'un seul intervalle.

Nous nous focaliserons sur une classe particulière d'automates cellulaires déterministes que nous présentons à présent :

Définition 1 (Automates σ -polynomiaux). *On appelle automate σ -polynomial un ACD F dont le voisinage \mathcal{N} est une partie finie de \mathbb{Z} , agissant sur une suite à valeurs dans un groupe $(\mathbb{A}, *)$ et de la forme $\prod_{i \in \mathcal{N}} k_i \sigma^i$ où les k_i sont des éléments finis de \mathbb{Z} . On note l'ensemble de ces automates $\mathbb{Z}[\sigma^{\pm 1}]$.*

Nous nous concentrerons sur deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}[\sigma]$, les automates additifs et multiplicatifs :

Définition 2. *On note $\mathbb{Z}[\sigma, \times]$ les automates sigma polynomiaux multiplicatifs i.e. un automate F agissant sur une suite à valeurs dans un groupe multiplicatif (\mathbb{A}, \times) de la forme*

$$F = \prod_{i \in \mathcal{N}} (\sigma^i)^{k_i} \quad (6)$$

et on note $\mathbb{Z}[\sigma, +]$ les automates sigma polynomiaux additifs i.e. un automate F agissant sur un groupe additif $(\mathbb{A}, +)$ de la forme

$$F = \sum_{i \in \mathcal{N}} k_i \sigma^i \quad (7)$$

Nous présentons à présent l'isomorphisme entre deux automates sigma polynomiaux :

Définition 3. *Soit deux automates $F \in \mathbb{Z}[\sigma]$ agissant sur une suite à valeur dans un groupe $(\mathbb{A}, *)$ et $F' \in \mathbb{Z}[\sigma]$ sur un groupe $(\mathbb{A}', *)$ avec $(\mathbb{A}, *) \cong (\mathbb{A}', *)$. On dit alors que F est isomorphe à F' et on note $F \cong F'$ si et seulement si $f' = \varphi(f)$.*

Grâce à l'isomorphisme entre les groupes multiplicatifs et additifs nous nous concentrerons sur la classe additive uniquement.

Dans les deux définitions ci dessus, les k_i sont des éléments de \mathbb{Z} .

On peut rattacher ces définitions au cas déjà bien étudié des polynômes de Laurent (c'est-à-dire les polynômes avec exposants dans \mathbb{Z}), d'où le nom de σ -polynomiaux.

Propriété 1. *L'anneau $(\mathbb{Z}[\sigma, +], +, \circ)$ des automates σ -polynomiaux additifs, munis de l'addition et de la composition usuelles, est isomorphe à l'anneau des polynômes de Laurent $(\mathbb{Z}[X^{\pm}], +, \times)$.*

Démonstration. On présente l'isomorphisme suivant :

$$\varphi : (\mathbb{Z}[X], +, \times) \rightarrow (\mathbb{Z}[\sigma, +], +, \circ) \quad (8)$$

$$\left(\sum_i a_i X^i \right) + \left(\sum_i b_i X^i \right) \mapsto \left(\sum_i a_i \sigma^i \right) + \left(\sum_i b_i \sigma^i \right)$$

$$\left(\sum_i a_i X^i \right) \times \left(\sum_i b_i X^i \right) \mapsto \left(\sum_i a_i \sigma^i \right) \circ \left(\sum_i b_i \sigma^i \right)$$

On peut voir que l'isomorphisme est compatible avec les deux lois de l'anneau des polynômes de Laurent. \square

En particulier, cet isomorphisme permet de voir que les automates σ -polynomiaux sont linéaires, associatifs et commutent, et nous permettra d'utiliser des formules telles que le binôme de Newton.

Nous nous intéresserons en particulier au cas où $\mathcal{N} = \{0, 1\}$ et aux automates suivants :

$$\begin{cases} \Delta = \sigma - Id \\ f_{\Delta} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \rightarrow \mathbb{A} \\ (a, b) & \mapsto b - a \end{cases} \quad (9)$$

que l'on appelle *automate de Vieru* et qui calcule les intervalles entre notes consécutives et

$$\begin{cases} \mathcal{T} = \sigma + Id \\ f_{\mathcal{T}} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \rightarrow \mathbb{A} \\ (a, b) & \mapsto b + a \end{cases} \quad (10)$$

connu sous le nom d'*automate de Ledrappier* et qui capture les symétries de réflexion (inversions) entre notes successives.

Nous nous intéressons à présent au calcul des images et antécédents d'une suite au travers d'un automate σ -polynomial. Nous présentons ici qu'une dualité existe entre certains automates et que caractériser les antécédents d'un automate revient à étudier un autre automate dans le sens des images. La preuve de la dualité repose sur l'inversion des lois locales propre à chaque automate et à des propriétés liées à sa construction géométrique propre.

Définition 4. *On dit qu'un automate F de fonction locale f est permutatif à gauche (respectivement à droite) si $\forall b \in \mathbb{A}$ (respectivement a), $a \mapsto f(a, b)$ (respectivement $b \mapsto f(a, b)$) est une bijection de \mathbb{A} dans \mathbb{A} .*

Il est aisé de voir que \mathcal{T} et Δ sont permutatifs à gauche et à droite par inversion de leur loi.

Pour $F \in \{\Delta, \mathcal{T}\}$, et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{A}$ et $y \in \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, on définit :

$$P(y, a, j) := \{x \in F^{-1}(y) / x(j) = a\}, j \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

et pour tout $j \in \{0, \dots, k + 1\}$, $a \in \mathbb{A}$, $\forall k \geq 0$, $\forall w \in \mathbb{A}^k$, soit $P(w, a, j) := \{v \in F^{-1}(w) / v(j) = a\}$.

Pour $a \in \mathbb{A}$, on note F_a^{-1} la fonction qui associe à y l'unique élément de $P(y, a, 0)$, c'est-à-dire la suite qui vaut a en 0 et dont l'image par F est y .

Grâce à la permutativité ci-dessus, on en déduit que $\forall y \in \mathcal{X}, \forall w \in \mathbb{A}^k : |F^{-1}(y)| = |F^{-1}(w)| = |\mathbb{A}|$. En effet

$$F^{-1}(y) = \bigsqcup_{a \in \mathbb{A}} \{F_a^{-1}(y)\} \quad (12)$$

On considère la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (X_n(i)_{i \in \mathbb{Z}})_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$X_n = \begin{cases} F_{A_n}^n X_0 & \text{si } n < 0 \\ X_0 & \text{si } n = 0 \\ F^n X_0 & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (13)$$

avec $F_{A_n}^n X_0 = F_{a_n}^{-1} \circ \dots \circ F_{a_{-1}}^{-1} X_0$ où $A_n = (a_n, \dots, a_{-1})$. La suite a pour configuration initiale X_0 , qui peut être aléatoire ou non. Le choix du vecteur A_n peut également être aléatoire ou non.

On définit comme suit le cône de dépendance spatiale, qui s'interprète intuitivement comme l'ensemble des valeurs dont dépend un site donné dans la grille :

Définition 5 (Cône de dépendance spatiale). *Soit une grille de \mathbb{Z}^2 de site (n, i) . On définit le cône de dépendance spatiale pour un site (n, i) et de longueur $\ell > 0$ par :*

$$\mathcal{S}(n, i, \ell) := \{(m, j) / m \in \{n, n-\ell\} : i \leq j \leq i+n-m\}. \quad (14)$$

On associe un cône complémentaire noté $\mathcal{S}^*(n, i, \ell)$ défini par :

$$\mathcal{S}^*(n, i, \ell) := \{(m, j) / j \in \{i, i-\ell\} : n \leq m \leq n+j-i\} \quad (15)$$

On remarque que $\mathcal{S}^*(n, i, \ell) = \mathcal{S}(n-\ell, i+\ell, \ell)$ entre autre en shiftant à la fois sur la coordonnée en temps n et sur la coordonnée spatiale i on arrive à faire coïncider les deux cônes.

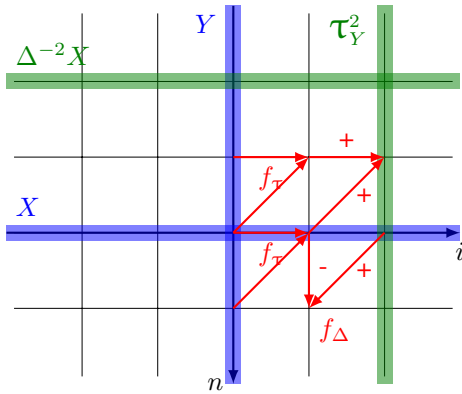


Figure 1. Illustration des cônes de dépendance avec les règles locales des automates.

On considère en parallèle la suite $(Y_i(n))_{i, n \in \mathbb{Z}}$, correspondant à lire le processus mais avec une rotation à 90 degrés, définie par :

$$Y_i(n) = X_n(i) \quad (16)$$

Définition 6. *Soit $F \in \mathbb{Z}[\sigma, +]$, on dit que F admet un automate dual s'il existe un automate F^* tel que pour tout $(n, i) \in \mathbb{Z}^2, \forall \ell > 0 :$*

$$(F^n X_0)(i) = F^{*\ell}(Y_{i-\ell}[n, n+\ell])$$

où $X[d, \ell]$ représente le mot $X(d) \dots X(\ell)$.

Théorème 7 (Dualité entre Δ et \mathcal{T}). $\forall (n, i) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$X_n(i) := (F^n X_0)(i) = (F^*)^i Y_0[n, n+i]$$

avec $\mathcal{T}^* = \Delta$ et $\Delta^* = \mathcal{T}$.

Propriété 2. *Soit $n \leq 0$ et X_0 une suite et $A_n = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Les valeurs des antécédents sont données par :*

$$\Delta_{A_n}^n X_0(i) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{i}{j} Y(n-j) \quad (17)$$

$$+ \sum_{k=0}^{i-n} \binom{i-k-1}{n-1} X_0(k)$$

$$\mathcal{T}_{A_n}^n X(i) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \binom{i}{j} Y(n-j) \quad (18)$$

$$+ \sum_{k=0}^{i-n} (-1)^{k+i+n} \binom{i+k-1}{n-1} X_0(k)$$

3. SUITES PÉRIODIQUES SUR \mathbb{Z}_N

On s'intéresse aux tempéraments égaux avec équivalence à l'octave. L'exemple le plus évident est celui du tempérament égal usuel, à 12 notes, mais notre analyse ne s'y restreint pas ; on pourra ainsi appliquer les résultats à des tempéraments microtonaux en quarts de ton, ou en tout autre nombre de notes.

Sous ces hypothèses, on peut assimiler l'espace des valeurs des suites que l'on traite au groupe cyclique de taille N , $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

3.1. Caractérisation des suites

Une propriété cruciale (pour notre analyse mathématique) des groupes cycliques est que l'on peut utiliser la décomposition en facteurs premiers de N pour décomposer à son tour le groupe \mathbb{Z}_N . Ainsi, tout élément de \mathbb{Z}_{12} s'écrit de façon unique comme la somme d'un élément de $4\mathbb{Z}_{12} = \{0, 4, 8\}$ et de $3\mathbb{Z}_{12} = \{0, 3, 6, 9\}$ (par exemple $7 = 4+3$ ou $5 \equiv 8+9 \pmod{12}$). De façon plus générale, si $n = \prod_i p_i^{k_i}$ (avec les p_i tous premiers et différents), alors $\mathbb{Z}_n = \bigoplus_i n p_i^{-k_i} \mathbb{Z}_n$. Additionnellement, le sous-groupe $\frac{n}{m} \mathbb{Z}_n$ (où m divise n) est isomorphe au groupe \mathbb{Z}_m donc les mêmes résultats s'appliquent aux deux. Une description plus détaillée de cette décomposition est donnée dans [3].

Par ailleurs, l'action des automates sur les suites est linéaire ($F(\alpha X + X') = \alpha F X + F X'$), et les propriétés des suites périodiques se combinent aisément par l'addition :

notamment, la somme deux suites de périodes différentes a pour période le plus petit commun multiple de leurs périodes. Cela nous permet d'étudier séparément chacun des termes d'une somme comme celle ci-dessus. Ainsi, il est suffisant de considérer le cas où $N = p^k$ avec p premier, le cas général pouvant être ramené à une combinaison de ces cas particuliers.

Dans le cas des suites périodiques, une décomposition supplémentaire peut être effectuée pour un automate donné [4], entre

- les suites *réductibles*, que l'action itérée de l'automate réduit à des zéros.
- les suites *reproductibles*, qui sont reproduites dans les images par l'automate.

Ainsi, toute suite périodique est de façon unique la somme d'une suite réductible et d'une suite reproductible.

Des caractérisations de ces deux catégories de suites pour l'automate Δ ont été proposées dans [2] et [1]².

Théorème 8. *Une suite X_0 à valeurs dans \mathbb{Z}_{p^q} est réductible selon Δ si et seulement si elle est de période p^k . De plus, le plus petit m tel que $X_m = 0$ est compris entre p^{k-1} et qp^k .*

Une suite X_0 à valeurs dans \mathbb{Z}_{p^q} est reproductible selon Δ si et seulement si³

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{\pi/p^r} X_0(p^r i + j) = 0 \quad (19)$$

où p^r est la plus grande puissance de p divisant π , la période de X_0 .

Nous introduisons ici une caractérisation similaire pour les suites réductibles selon \mathcal{T} :

Théorème 9. *Une suite X_0 à valeurs dans \mathbb{Z}_{p^q} est réductible selon \mathcal{T} si et seulement si elle est p^k -antipériodique, c'est-à-dire que $\sigma^{p^k} X_0 = -X_0$. De plus, \hat{m} , le plus petit m tel que $X_m = 0$ est compris entre p^{k-1} et qp^k .*

Démonstration. On rappelle ce résultat :

Lemme 10. *Soit $n = p^k$, p premier et $k \in \mathbb{N}^+$. Alors $\binom{n}{m}$ est divisible par p sauf si m est 0 ou n .*

Soit X de période $2p^k$ à valeurs dans \mathbb{Z}_p . On a sans perte de généralité :

$$\mathcal{T}^{p^k} X = \sum_{i=0}^{p^k} \binom{p^k}{i} \sigma^i X \quad (20)$$

$$= X + \sigma^{p^k} X \quad (21)$$

Ainsi, $\mathcal{T}^{p^k} X = 0$ si et seulement si $\sigma^{p^k} X = -X$.

²La caractérisation d'Ancelet raffine celle d'Andreatta et al. en bornant le nombre d'itérations nécessaires pour réduire une suite à zéro. Nous en présentons ici une nouvelle version avec une borne supérieure plus serrée. La preuve de cette borne améliorée suit la même structure que celle du théorème 9 et ne sera pas détaillée ici.

³ X_0 est périodique, donc il suffit de le vérifier pour j entre 1 et p^r .

De plus, on remarque que $\mathcal{T}^{p^k} X$ est p^k -cyclique, donc si ce n'est pas la suite nulle (et $p > 2$), elle n'est pas \mathcal{T} -réductible et par conséquent X non plus.

On suppose maintenant le résultat vrai pour des valeurs dans $\mathbb{Z}_{p^{q-1}}$ ($q \geq 2$). Soit β la projection canonique de $\mathbb{Z}_{p^k}^{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$.

Si X est p^k -anticyclique, βX l'est également et est donc réductible en au plus p^k itérations. Par conséquent, $\mathcal{T}^{p^k} X$ prend ses valeurs dans $p\mathbb{Z}_{p^q}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}_{p^{q-1}}$, or (comme \mathcal{T} est linéaire) elle est aussi p^k -anticyclique, donc elle est réductible en au plus $(q-1)p^k$ itérations, d'où $\hat{m} \leq qp^k$.

On considère X' et X'' ainsi définies :

$$X'(i) = \beta X(i) \text{ pour } 0 \leq i < p^k \quad (22)$$

$$\sigma^{p^k} X' = -X' \quad (23)$$

$$X'' = X - X' \quad (24)$$

X' est p^k -anticyclique et donc réductible. Il en suit que si X est réductible, alors X'' l'est également. Toujours si X est réductible, alors βX l'est aussi donc βX est p^k -anticyclique d'où $\beta X = \beta X'$. On a alors $\beta X'' = \beta X - \beta X' = 0$ donc X'' prend ses valeurs dans $p\mathbb{Z}_{p^q}$. Par la récurrence, X'' est p^k -anticyclique, donc X aussi. \square

Théorème 11. *Soit X une suite de période $2m$ à valeurs dans \mathbb{Z}_{p^q} , et $X' = \sum_{i=0}^{\frac{2m}{p^r}-1} (-1)^i \sigma^{ip^r} X$, avec p^r la plus grande puissance de p qui divise m .*

X est reproductible selon \mathcal{T} si et seulement si $X' = 0$.

Démonstration. Si X est reproductible, alors X' est reproductible, or X' est p^r -antipériodique par construction et donc réductible, d'où $X' = 0$.

On pose $X = X_{red} + X_{rep}$ la décomposition en réductible et reproductible de X , et on construit X'_{red} et X'_{rep} de la même façon que X' . On a montré que $X'_{rep} = 0$ donc si $X' = 0$, $X'_{red} = 0$. De plus, comme X_{red} est p^q -antipériodique, $X'_{red} = \frac{2m}{p^r} X_{red}$ or $\frac{2m}{p^r}$ est premier avec p^q (par définition de r) et donc inversible⁴ donc $X_{red} = 0$ et $X = X_{rep}$. \square

3.2. Évolution des périodes

À l'aide des formules, on peut déterminer l'évolution des périodes dans le sens des antécédents.

Théorème 12. *Soit un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ selon F . On pose $c = X_{-1}(\pi) - X_{-1}(0)$. Si X_n est de période π , alors X_{-1} est de période $d\pi$, avec d défini comme :*

- si $F = \mathcal{T}$ et π est impair, d est 1 si $c = -c$, 2 sinon.
- si $F = \Delta$ ou si $F = \mathcal{T}$ et π pair, d est le plus petit entier positif tel que $cd = 0$.

Un corollaire de résultat est que la période peut uniquement augmenter d'un facteur qui divise la taille du groupe (exception faite des périodes impaires pour \mathcal{T} , exception

⁴On notera au passage que cette propriété donne un accès rapide à la composante réductible de X quelconque.

qui ne peut se produire que pour la première augmentation de période).

Les bornes énoncées sur la réductibilité permettent également de borner le temps entre 2 augmentations de période, car l'évolution de la période est contrôlée par la composante réductible (la période de la composante reproductible restant stable).

Théorème 13. *Soit X_n à valeurs dans Z_{p^q} réductible selon F . Si $\pi(X_{n-1}) = d\pi(X_n)$, alors le plus grand $m < n$ tel que $\pi(X_{m-1}) > \pi(X_m)$ est compris entre $p^k(d - q)$ et $p^{k-1}(pd - 1)$.*

Démonstration. Soit l l'entier tel que $X_\ell = 0$ et $X_{\ell-1} \neq 0$. Le théorème de caractérisation des réductibles nous donne les bornes suivantes (avec $d = p^r$ et $r' > 0$) :

$$p^{k-1} \leq \ell - n < qp^k \quad (25)$$

$$p^{k+r-1} \leq \ell - m < qp^{k+r} \quad (26)$$

$$p^{k+r+r'-1} \leq \ell - m - 1 < qp^{k+r+r'} \quad (27)$$

D'où

$$p^{k+r} < \ell - m < qp^{k+r} \quad (28)$$

$$p^{k+r} - qp^k < n - m < qp^{k+r} - p^k k - 1 \quad (29)$$

$$p^k(p^r - q) < n - m < p^{k-1}(qpr + 1 - 1) \quad (30)$$

□

3.3. Intérêts pratiques des résultats

Nous avons présenté un certain nombre de résultats théoriques, dont nous allons maintenant expliciter quelques applications, qui seront par la suite utilisées dans le logiciel UPISketch.

Les formules des équations 17 et 18 permettent un accès explicite à n'importe quelle valeur $X_n(i)$ d'un processus par une somme de n valeurs, sans avoir à calculer toutes les $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs du cône de dépendance.

Comme on l'a vu dans la preuve du théorème 11, la séquence X' permet d'identifier efficacement la composante réductible selon \mathcal{T} d'une suite, et par là-même sa composante reproductible. Une décomposition analogue peut être effectuée selon Δ , comme décrit dans [3].

De plus, les caractérisations données dans les théorèmes 8 à 11 permettent de construire explicitement des suites réductibles ou reproductibles selon Δ ou \mathcal{T} pour une période donnée. Ainsi, si p^r (respectivement $2p^r$ pour \mathcal{T}) est la plus grande puissance de p qui divise cette période, lors de la construction d'une suite réductible on peut choisir librement une valeur pour chaque j parmi les $X(p^r i + j)$; de manière complémentaire, pour une suite reproductible, on peut y choisir $p^r - 1$ valeurs, la dernière étant liée. Cette construction permet également de déterminer la taille des ensembles correspondants : pour une périodicité π donnée à valeurs dans Z_{p^q} , il existe $p^{q\pi}$ suites réductibles et $p^{q(\frac{\pi}{p^r} - 1)}$ suites reproductibles (on retrouve bien le produit $p^{q\pi}$ comme le demande la somme directe issue de la décomposition).

4. IMMERSION DES AUTOMATES DANS UPISKETCH

4.1. UPISketch

UPISketch, projet financé par des fonds européens et français en partenariat avec l'Université Européenne de Chypre, avait pour objectif de reproduire basiquement le concept de l'*UPIC* sur un type de machine bien particulier : la tablette. Cela a permis notamment d'en disséminer, en 2018, une dizaine d'exemplaires en libre accès dans des bornes spécialement conçues à cet effet dans plusieurs villes de Chypre. Il en existe maintenant des versions compatibles pour les systèmes Windows et OSX⁵.

Le point de départ d'*UPISketch* est l'*UPIC*, qui constitue une base solide, avec des caractéristiques claires. L'*UPIC* est l'un des premiers outils de composition assistée par ordinateur. Sa particularité est qu'il prend le dessin comme principal moyen de saisie de l'information musicale.

Ce parti pris est celui d'un architecte, mais il répond également à une exigence d'accessibilité, une volonté de rendre disponible un outil de création musicale à toute personne le souhaitant, au-delà de toute notion de culture, d'âge ou de connaissances musicales. Le système est ouvert et correspond à une vision plus générale du phénomène musical, traditionnellement réduit à l'usage du solfège et du système tempéré.

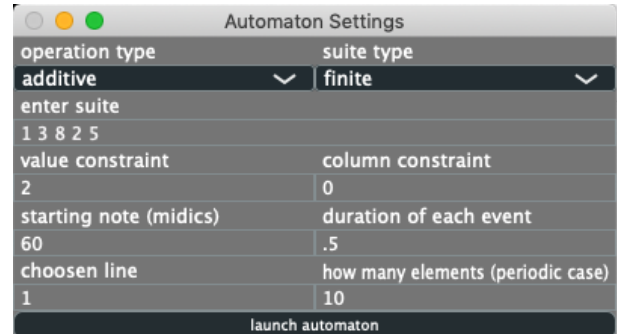


Figure 2. Fenêtre de réglages pour les automates cellulaires dans l'application UPISketch

4.2. Immersion

Un bref résumé de son fonctionnement serait le suivant : nous disposons d'une *page* (comme une partition, mais dans le domaine continu) sur laquelle nous dessinons des *gestes* qui représentent la hauteur des sons synthétisés dans le temps. Le dessin peut également être utilisé pour déterminer les enveloppes de ces arcs, ou les formes d'onde elles-mêmes.

Ainsi on dessine une courbe ou plusieurs courbes, et on appuie sur le bouton *lecture* pour entendre le résultat. *UPISketch* permet d'explorer de nouveaux types de tempéraments et de gammes, ainsi que de nouveaux types de relations rythmiques. D'autres modes de génération

⁵Liens de téléchargement des différentes versions : <http://centre-iannis-xenakis.org/upisketch>

sont cependant possibles que par le dessin direct, ainsi que nous allons le voir dans ce qui suit. L'apport extérieur que représente ces modes peut décloisonner l'imaginaire créatif, au même titre que l'approche dessinée a pu le faire par rapport à la composition musicale.

L'utilisation des automates cellulaires semble une évolution naturelle pour *UPISketch*, qui peut exploiter ainsi de façon conjuguée deux approches de la composition, l'une dans l'exploration d'un potentiel génératif, l'autre par la puissance de la capacité organisationnelle du dessin. Xenakis lui-même, en 1981, a évoqué dans une interview sur l'avenir de l'*UPIC* l'ajout des automates cellulaires.⁶ C'est désormais chose faite, de façon basique pour le moment, mais il sera ensuite possible de générer des nuages d'évènements selon des règles que l'on pourra rentrer manuellement ou choisir dans un catalogue.

Dans le cadre de cet article, l'espace d'investigation est limité aux automates de Vieru et Ledrappier, avec une première étape par de simples automates additifs et soustractifs finis, utilisant des règles similaires à celle du triangle de Pascal.

4.3. Exemple d'utilisation

L'interface utilisée consiste en une nouvelle fenêtre d'*UPISketch*, dans laquelle nous pouvons déterminer :

- le choix entre additif et soustractif ;
- le choix entre suite finie et suite périodique ;
- la définition d'une suite ;

⁶ Lien vers la vidéo dans les archives du Centre Iannis Xenakis : www.centre-iannis-xenakis.org/items/show/674, accédé le 21 octobre 2020.

- une contrainte, par la définition d'une valeur souhaitée pour toutes les lignes dans l'emplacement correspondant à la colonne donnée ;
- une note de départ en midicents ;
- la durée de chaque évènement ;
- la ligne souhaitée pour le résultat ;
- le nombre d'éléments souhaités en sortie (pour le cas d'une suite périodique).

Une fois un son choisi dans la colonne de gauche et ces données déterminées, on peut lancer le calcul. Le mot (une ligne de la suite) s'affichera alors dans la page d'*UPISketch* sous la forme d'une séquence de sons transposés selon la succession de valeurs internes au mot. Les éléments de cette séquence constitueront automatiquement un nouveau groupe de gestes dans *UPISketch*. La contrainte que l'on donne ne peut pas s'appliquer si l'index de colonne est supérieur à la taille de la ligne. Pour pallier à ce cas de figure, il a été choisi de placer la valeur de la contrainte sur le dernier élément de la ligne si nécessaire.

La figure 3 montre une succession de séquences finies, représentées par différentes couleurs, qui sont issues d'un nombre d'itérations différentes de l'automate sur la même suite de base. La Figure 4 donne un exemple de superposition de séquences, chacune à une vitesse différente et se référant à une ligne différente de la grille résultante.

4.3.1. Implémentation à court terme

La suite pourra être créée à partir d'un geste préalablement disposé dans la page. Le choix des emplacements et des valeurs de contraintes pourra être fait selon des



Figure 3. Exemple de séquence générée par la version additive, sur une suite finie. La séquence verte correspond à la suite $X = (4, 1, 2, 3, 7, 2, 5, 1)$ donnée par l'utilisateur, et les séquences rouge, jaune et rose correspondent respectivement à $\tau^{-2}X$, $\tau^{-1}X$ et τX .

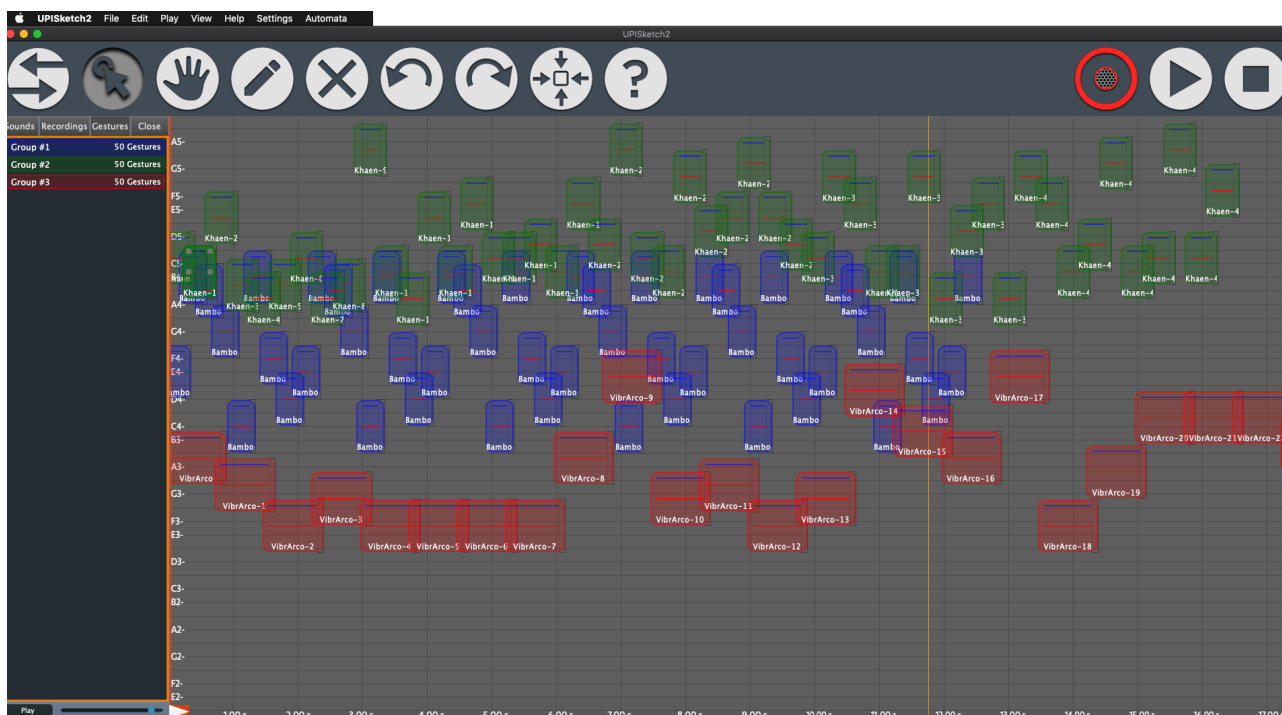


Figure 4. Exemple de séquence générée par la version additive, sur une suite périodique.

règles probabilistes. On pourra établir des préférences esthétiques a priori sur la façon dont la suite va se comporter : périodique, quasi périodique, reproductible ou réductible. L'utilisateur sera ainsi guidé pour le choix de sa suite intervallique initiale et des propriétés qu'elle possède.

5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à l'évolution de suites numériques musicales à travers des automates cellulaires. En prolongation des résultats établis par [4], nous avons établi des caractérisations pour un nouvel automate. Il est intéressant de voir que les automates présentés ici possèdent par exemple les mêmes bornes concernant le temps de réductibilité.

La deuxième contribution majeure de cet article est l'intégration d'un système dynamique simple dans l'application *UPISketch* d'assistance à la composition par le dessin, qui ouvre la voie pour de nombreuses extensions. Le point fort d'*UPISketch* résidant dans sa capacité à pouvoir manipuler des objets musicaux non bornés en fréquence et en temps, d'autres tempéraments que les tempéraments égaux peuvent être envisagés. On pourrait notamment considérer des tempéraments issus de l'intonation juste, pour lesquels certaines des formules exhibées dans cet article restent utilisables grâce à un isomorphisme entre automates additifs et multiplicatifs. D'autres phases de développement permettront par exemple d'exploiter pleinement le potentiel des résultats mathématiques présentés dans cet article, notamment les théorèmes 8 à 11.

Dans cette première version du module *UPISketch*, les valeurs des suites ont été projetées sur l'espace des hauteurs de note ; cependant, il est tout à fait possible de

projeter ces valeurs sur d'autres dimensions musicales, comme le rythme ou l'instrumentation, ainsi que le pratiquait Vieru.

Nous souhaitons pouvoir exercer un choix sur la taille des cycles pour les suites reproductibles. Aucun résultat mathématique n'existe pour l'heure à ce sujet, mais des examens manuels semblent révéler une connection forte entre la taille du groupe cyclique, la période de la séquence reproductible et le temps de reproductibilité.

La spécification des antécédents est actuellement effectuée avec une valeur par ligne du processus. Un mode alternatif de spécification pourrait être de laisser certaines lignes libres pour en contraindre plus fortement d'autres. Les modalités précises de cette spécification alternative restent toutefois à définir.

Une autre question fondamentale est l'exploration d'autres automates sigma polynomiaux et la recherche de l'existence d'un dual pour ces derniers. Nous souhaitons également étudier d'autres classe d'automates cellulaires déterministes et le cas des automates cellulaires probabilistes qui présente un réel intérêt.

Un cas intéressant pour le futur concerne l'utilisation de suites sturmiennes, qui sont des suites quasi périodiques avec action d'automates cellulaires sur ces dernières. Cela permettrait de générer des mélodies et des patterns rythmiques dans une classe de suites proches de celles étudiées dans cet article.

6. RÉFÉRENCES

- [1] Ancellotti, N. « On Some Algebraic Aspects of Anatol Vieru Periodic Sequences ». mémoire de Master,

sous la dir. de L. Fiorot, Università degli studi di Padova, 2015.

- [2] Andreatta, M., Vuza, D. T. «On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's modal theory». *Tatra Mountain Mathematics Publications* 23/1 (2001), p. 1-15.
- [3] Andreatta, M., Vuza, D. T., Agon, C. «On some theoretical and computational aspects of Anatol Vieru's periodic sequences». *Soft Computing* 8/9 (2004), p. 588-596.
- [4] Lanthier, P., Guichaoua, C., Andreatta, M. «Reinterpreting and extending anatol vieru's periodic sequences through the cellular automata formalisms». *Mathematics and Computation in Music* Montiel, M., Gomez-Martin, F., Agustín-Aquino, O. A. (dir.), Springer, Cham, 2019, p. 261-272.
- [5] Vieru, A. «Modalism—A "Third World" ». *Perspectives of New Music* 24/1 (1985), p. 62-71.
- [6] Vieru, A. «Generating Modal Sequences (A remote approach to minimal music)». *Perspectives of New Music* 31/2 (1992), p. 178-200.
- [7] Vieru, A. «*The Book of Modes (I, II): From Modes to a Model of the Intervallic Musical Thought: from Modes to Musical Time* ». Editura Muzicală, Bucarest, 1993.